数学と経済との均衡の捉え方の一考察

後藤　和雄,岡山大学客員教授

gotokazuo@gmail.com

光多長温先生からの依頼で、経済学や世間の人が考える均衡と数学で取り扱う均衡との相違等について本ショート・ペーパーを作成したものである。

最初に，「**経済的均衡**」を扱った論文は**ワルラス**である。ワルラス(Marie Esprit Le Walras,1834年-1910年，フランスの経済学者）は，経済学的分析に記述言語としての数学的手法を用い，一般均衡理論を最初に定式化した。完全競争市場における価格決定を理論的に解明した。

ワルラスの法則とは，経済学の基本的な法則の一つであり，「市場の超過需要額の総和は常にゼロになる」という法則である。

ある市場で超過需要があれば，他の市場では超過供給がある，という法則である。

数学では，John　Nashによる均衡に関する理論と定理がある。

「**ナッシュ均衡**」は，論文「Equilibrium points in N-Person Games,1950, Proceedings of the National Academy of Sciences」で発表された非協力ゲーム理論に関する研究である。

国語大辞典，小学館，昭和56年(1981)年，p.702によると，「均衡」とは，「二つまたはそれ以上の物事の間に，力や重さのつりあいが取れていること。釣り合い。平衡。バランス。」とある。経済学でいう均衡理論とは，均衡状態にある商品相互間の価格関係など，相互依存の関係にある経済的諸量の均衡状態が「いかにして成立するか」を分析する理論とある。

均衡を考えるには，

1．「均衡状態」の定義とは，どのように定義されるのか。
2．「相互依存の関係」とは，どのようなことをいうのか。
3．「経済的諸量」とは，考えている仮定の数値化で測れるものであると考えられる。数値化できないものは，定性的な個人や集団の感覚や感情であるので，数学的な考察はできない。しかし，トポロジー（位相数学）的な考察は可能であろう。
4．「均衡状態がいかにして成立するか」は，どうような状態を均衡状態であると，考察している人が定義しているか，意識しているか。

以上のものを明確にして，均衡を多くの論文が発表されている。

Nash均衡

ナッシュ（Nash）均衡とは、標準型ゲーム$G=(N,S,u)$がある。Nはプレーヤーの集合、$S=\Pi_{i\in N}S_i$は戦略の組の集合，$u=(u_i)_{i\in N}, u_i: S\to R\ (i\in N)$は効用の組において，戦略の組 $S^*\in S$がナッシュ均衡であるとは，すべてのプレイヤー$i\in N$と，すべてのSiに対して，$u_i(S^*)\geqq u_i(s_i)$が成り立つときをいう。

ナッシュ均衡では，非協力ゲームにおいて，自分だけ戦略を変えると，損をしてしまう状況が，すべてのプレーヤーで起こっている**硬直状態**のことである。

具体例１.（値下げの例） 販売戦略として，値上げをする，値下げをする，の２つがあるとする。A，B，Cの３店舗があると仮定する。Aが値下げをしたら，Aの売り上げがアップし，利益が増えた。すると，Bも値下げをし，Bも売り上げがアップし，利益が増えた。そうすると，それを見たCも値下げをし，３社横並びになった。

これ以上の値下げは，A，B，Cの利益が減ることになるので，値下げはできない状態に達する。値上げをすると売り上げは下がるので，値上げの戦略はとれない。A，B，Cは値上げも値下げもできない状態になる。これが**ナッシュ均衡**である。

ナッシュ均衡はプレイヤーが相談できない，非協力ゲームが前提であるので，「せーの！」では，値上げはできない。

2024年まで多くのものが低価格で安定していたが，2024年から2025年11月現在までに多くの商品やサービスが一斉に値上げをしている。給与や年金がその上昇分を補っていないため，庶民の生活を脅かしている。生活は厳しい。１円でも安い店で，安くてよい商品を買っている。

実例１　チェーン店流行っていた餃子チェーン店が岡山にある。主力の商品の単価を値上げしたため，今まで多くの人で賑わっていたが，高値感を感じたのだろう。来店者が激減し，2025年12月に閉店になった。

昨年からの高騰した原材料と人件費を価格転嫁した，店の利益に関する効用関数の均衡と，お客の外食に対するその商品価格の効用関数の均衡とに，ズレが生じた。すなわち，価格を上げることによる店の均衡状態と，(他の店の選択肢が存在する）消費者の均衡状態に，ズレが生じた結果，消費者が激減した。

具体例２．地理的立地問題：線分上に人が均一に住んでいると仮定する。カフェAを出店する。店の評価は関係なく市民は一番近い店に行くと仮定する。

１店舗の場合，中央に店を出す。新たにカフェBが進出する。A，Bが話し合った後，町を半分にし，それぞれの中央にそれぞれカフェA，カフェBを出す。市民と店それぞれによい，**社会最適状態**である。

しかし，A，Bともに移動できると仮定すると，AはB側に少し移動すると，お客を多く獲得できる。そうするとBもA側に移動する。それを続けていくと，A，Bは中央に並んでカフェを出すことになる。

最終的に，どのように動こうとも，動いた方が利益を失う。1929年に，ハロルド・ホテリングが発表したもので，**ホテリングの法則**という。「**同じエリアで複数の商店が存在する場合，最終的にはそれらの店舗は中心部分に密集する。**」というものである。これは，「**地理的立地問題**」のナッシュ均衡である。

大阪船場の繊維問屋街，東京神田の古本屋街，東京日暮里繊維街などがその一例である。

具体例３．囚人のジレンマ

AとBとが，ある犯罪の容疑者として逮捕され，お互い別々の部屋で取り調べを受けている。次の提案をされた。

１．２人とも自白をしないならば，２人とも拘禁刑１年である。

２．２人のうち１人だけ自白するならば，自白した人は釈放，自白しない人は拘禁刑５年である。
３．２人とも自白したら，２人とも拘禁刑３年である。

2×2行列で，ＡとＢの利得行列を描くと，**「２人とも黙秘をすることが，パレート最適である。」**全体の利益を最大化するのが，パレート最適である。

しかし，Ａ，Ｂ各自が，相手が自白して自分が不利になると考えて，戦略を変えて，自分が得するように自白すると，２人とも３年の拘禁刑で，ともに自白しない２年の拘禁刑よりも損をする。したがって，**個人にとってリスクが少ない「ナッシュ均衡」と全体の利益を最大化する「パレート最適」は必ずしも一致しない。**

具体例４．短絡道路を作ると交通渋滞が酷くなる例

３人以上になると，ブライスのパラドックスが起こる。

交通渋滞を解消するために，道路を作ることで，かえって交通渋滞がひどくなる状態が存在するという**パラドックス**である。**道路を封鎖することで，周辺の渋滞が緩和された例**がある。

Ｂから入って，Ｄに抜ける道路がある。途中に，ＡとＣを通る２つの道がある。４角形の４頂点をＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄとする。ＡからＤへは４５分，ＢからＣへは４５分かかる，と仮定する。

Ａまでに行く時間は，辺ＢＡを通る時間は，ＢＡを通る台数を100で割った時間である。ＣからＤへ行く時間は，辺ＣＤを通る台数を100で割った時間である。

ＢからＤへ，4000台が通ると仮定する。

全体の最小時間は，Ｂで2000台ずつ分かれて，ＡまたはＣを経て，出口のＤへ向かう方法で達成される。それぞれ $45+\frac{2000}{100}=65$分である。

ＡからＣを結ぶ一方方向のショートカット道路を作る。
ＡＣ間の移動は無視できる時間で移動可能と仮定する。

ＣＤは現在，２０分掛かるから，ＢＡＣＤで 20+20 =40分であるから，65分と比べて15分早く到着できると考える。

したがって，ＢＡを通る2000人は，ＡＣでショートカットして，ＣＤを通る方法を選択する。

よって，ＢＡは20分掛かり，ＢＣは45分で，ＡＤは45であり，ＣＤは$\frac{4000}{100}=40$である。

ＢＡＣＤの道が合計20+40=60分であるので，ＢＣＤやＢＡＤの$\frac{2000}{100}+45=65$分よりも5分短縮する。皆がＢＡＣＤの道を使おうと考える。このとき。$\frac{4000}{100}+\frac{4000}{100}=80$となり，ショートカットを作ると，15分遅くなる。各自が得するように動くので，全体最適にはなっていない。

一見，便利になるように作っても，各自の行動が同じである場合このようなことが起こる。実際は，他人とは異なる戦略，逆張りをする人や戦略をとるので，時間がたてば，局所的には均衡状態に落ち着く。

個人の合理性と全体の合理性とは異なる例である。

現実の行動

２人以上の参加者が存在するとき，均衡について，いろいろ複雑なことが起こる。ナッシュの定理において，ナッシュ均衡が存在すると仮定する。ある参加者の効用関数u_iは，別の参加者の効用関

数v_iとは異なっていることが考えられる。

参加者のすべての戦略が相互に分かっていないので，各々が相手の戦略を推測する。戦略の集合はお互い異なっている状態で，ナッシュ均衡を求めることになる。

すべての参加者の戦略と効用関数（参加者の効用関数がすべて等しい場合）を，含んだゲームを考える。ナッシュ均衡Aが存在していても，参加者それぞれが考えるゲームの戦略は異なっているので，それぞれの参加者は,ナッシュ均衡Aであるとは考えられない。

したがって，各自の効用関数（他の参加者からは分からない関数）に基づいて戦略を変える。

参加者の効用関数が，それぞれ異なるのであれば，すべての参加者がナッシュ均衡とは考えずに，別の戦略をとる。さらに，「**損して得取れ。先憂後楽。**」などの発想のゲームの参加者の戦略をとる効用関数は，そのような発想にない他の参加者の効用関数とは異なる。効用関数が異なるので，ナッシュ均衡はそれぞれ違ったものになる。

ゲームにおいては，時間とともに，「**逆張り**」の戦略をとる参加者も存在する。ナッシュ均衡の定理においては，ゲームの戦略および効用関数には，時間の概念は存在していない。時間の瞬間の一場面の切り取り状態と考えると，時刻と共に，ナッシュ均衡が時間と共に変化すると考えられる。

これらの取り扱いは推定・予測ができないという難しい問題を含んでいるので，実験経済学という研究分野で研究されている。

カタストロフィー理論からの考察

ルネ・トム(1972年)によるカタストロフィー（破局の）理論は，連続的に変化する力学系において，特異点が存在する場合，トポロジー的に次の７つの形：

折り目，カプス（突点），ツバメの尾，蝶，双曲的臍，楕円的臍，放物的臍

に限ることが証明されている。

連続的に変化し，連続的に均衡が変化していても，ある臨界値を過ぎると，他の状態に不連続に状態を移す破局が起こることが，カタストロフィー理論から言える。

外食店は店固有の効用関数を設定する。しかし，その店以外のさまざまな外食やいろいろな店を含めた各自それぞれの効用関数に基づいて，お客は行動する。店とお客それぞれの戦略の集合は，相異なる。

店とお客との効用関数を力学系と考える。徐々に（連続的に）効用関数に従って，店と各自はそれぞれ行動する。ある臨界値を超えるとカタストロフィー（破局）を迎える i.e.,商品の値上げによる不連続な変化（破局）が起こる。
チェーン店の客数が激減した実例１．が例である。

纏めると，均衡状態であっても，その均衡状態が徐々に変化する場合，効用関数を力学系と考えると，ある臨界値において不連続な破局，すなわち，お客が激減して均衡することが起こる。逆に，激増して均衡ということも起こる。